



TITLE:

遠方場に生じる二つの球面衝撃波 (ナビエ・ストークスの方程式の解)

AUTHOR(S):

井上, 良紀; 辻村, 裕次

CITATION:

井上, 良紀 ...[et al]. 遠方場に生じる二つの球面衝撃波(ナビエ・ストークスの方程式の解). 数理解析研究所講究録 1984, 539: 170-185

ISSUE DATE:

1984-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98725>

RIGHT:

遠方場に生じる二つの球面衝撃波

阪大基礎工 井上良紀 (Yoshinori Inoue)

阪大基礎工 辻村裕次 (Hiroji Tujimura)

§ 1. はじめに

物体が媒質中で脈動あるいは振動することによって放射される音波の伝播の問題は、音響学における基本的な問題の一つである。特に球の脈動により放射される球面音波の問題は、三次元音響の中の最も簡単かつ基本的なモデルであるので、線形・非線形を問わず、これまで数多く研究がなされてきた。

話は幾分脇路に逸れるが、1940年代の初め、L.D. Landau は、有名な理論物理学教程の内の一巻、《連続媒質の力学》を執筆していた。それは1944年に出版されたのであるが、そのため、この前後の時代に彼は集中的に流体力学の諸問題に取り組んだ。伝記「ランダウの生涯」^[1]によると、この分野における最も重要な研究の一つは“発生源から遠く離れた衝撃波について”^[2](1945年)であると記されている。それに関する一節を引用すると——超音速で運動する物体から遠く離れ

たところには、実際には、一つではなく、連なった二つの衝撃波が存在することを Landau は明らかにした。最初の衝撃波で、圧力が飛躍的に増大する。次に圧力が漸次低下する領域がきて、そのあと、圧力は再び二番目の衝撃波において、飛躍的に増大する。この研究で衝撃波の断面（プロファイル）とその強さの減衰の法則が明らかにされた。—— Landau の得たこれらの結果は、現象の特性をみごとに記述している。しかし、それは多分に Landau 流の直観力に依存して導出された部分が少なからずあるように思われる。そこで、ここでは、この古典的な問題を理想化したモデル、すなわち脈動球の放射する弱非線形音波の遠方場における振舞を解析する問題として理解しやすい形で捉える。つまり、問題を非線形双曲型偏微分方程式の境界値問題として定式化し、‘くり込みの方法’⁽³⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾と呼ばれる特異摂動法を用いて近似解を求め、定量的な評価を行う。

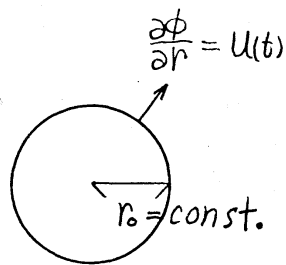
Landau は、上記の問題を解析するに当り、音波と衝撃波に関する極めて重要な一般的な性質を導いている。それを以下に述べよう。⁽⁶⁾

まず、線形球面音波について、密度分布（あるいは圧力分布）に関し、球面波は平面波と異なっており必ず圧縮部と希薄部の両部分より構成される。すなわち、

$$\int_{-\infty}^{\infty} p' dt = 0 \quad (1)$$

ただし、圧力 p を $p = p_0 + p'$ (p_0 は平衡状態での圧力) のように分解した。

また、球が膨動を行う際、その表面上 $r=r_0$ での径方向速度が $u(t)$ で与えられるとすると、速度ポ



テンシャル ϕ は、

$$\phi(r, t') = -\frac{cr_0}{r} e^{-ct'_0} \int_{-\infty}^{t'} u(\tau) e^{c\tau_0} d\tau \quad (2)$$

$$t' = t - (r - r_0)/c$$

ただし、 c は平衡状態での音速

Fig. 1

のように求まる。もし、ある瞬間、例

えば $t=0$ で球の膨動が停止したとする。すると、時刻 $t = (r - r_0)/c$ 以後、位置 r での速度ポテンシャルは、

$$\phi = \text{const.} \times e^{-ct'_0} \quad (3)$$

の形をとる。つまり、空間的に見た場合に波動は、いわゆる‘尾’を引くわけである。平面波では‘尾’は引かない。

さらに、Landau は、弱非線形球面音波について、次の重要な結果を得ている。

球面波は、非線形効果により波形がゆかんでゆくが、そのゆがみ具合を示すパラメータ δr は、

$$\delta r \sim \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad (4)$$

で与えられる。ここに r_0 は音源である球の半径である。

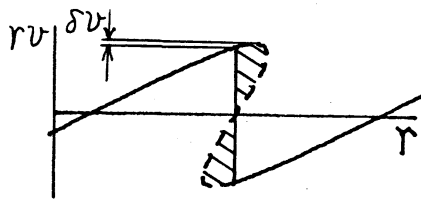
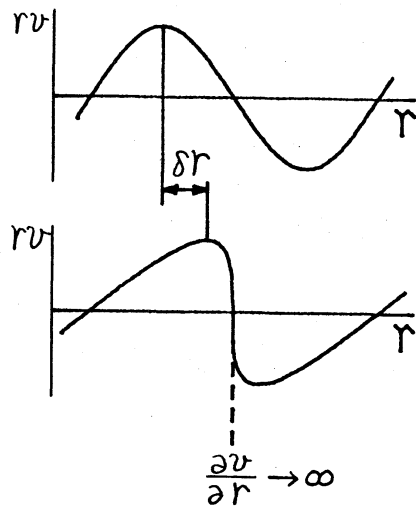


Fig. 2

さらに、そのゆがみ、いわゆる
‘突っ立ち’により、ついに衝撃波を形成する。その形成される位置は、ある物理量、例えば、流体粒子の速度 v について、 $\frac{\partial v}{\partial r} \rightarrow \infty$ と初めてなる位置である。

衝撃波形成後は、等面積条件により、その振幅が記述され、したがって波は、Fig. 2に示すように δv だけ減衰してゆく。

Landauは、以上の結果を基に、“発生位置から遠く離れた衝撃波

について”解析を行っている。そして、Fig. 3のように、十分遠方で圧縮部と希薄部にそれぞれ一つの衝撃波を生じ、 v （あるいは p ）の負の値をもつ‘尾’を引いてゆくと予測される結果を図示している。

しかし、我々の得た結果では（Fig. 8参照）、‘尾’は正の

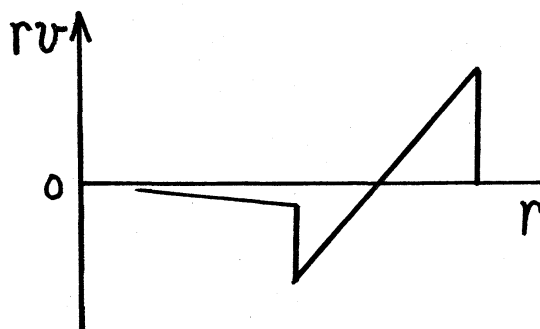


Fig. 3

値をもつことがわかる。Landau が Fig.3 を描いた過程の詳細がわからないので、何故‘尾’の正負が逆になっているのか、今のところ不明である。

§2. 基礎方程式

完全気体からなる非粘性圧縮性流体の等エントロピー流を考える。さらに流れの場は球対称であると仮定する。(流速 v を極座標表示した時, $v = (v(r, t), 0, 0)$.) 当然, 流れは, この場合, 非回転的になる。そこで, $v = \partial\phi/\partial r$ で定義される速度ポテンシャル $\phi(r, t)$ を導入することができる。連続の式, 運動方程式, 断熱関係式から次の二式を得る。

$$\Delta\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = (\gamma-1)\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi)^2 + O(\phi^3) \quad (5)$$

$$\text{ただし } \Delta\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi), \quad (\nabla\phi)^2 = \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)^2$$

$$(1+p)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 - (\gamma-1)\left\{\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\right\} \quad (6)$$

ただし, 全ての変数は, 一のついた次元のある量を次の式により, 無次元化したものである。

$$r = \frac{r}{r_0}, \quad t = \frac{c_0 t}{r_0}, \quad \phi = \frac{\bar{\phi}}{c_0 r_0}, \quad p = \frac{\bar{p}}{p_0} - 1 \quad (7)$$

ここに, r_0 は球の基準半径, c_0, p_0 は, それぞれ静止流体の音速及び圧力である。また, γ は比熱比である。

境界条件は, $R(t)$ を脈動球の半径とすると, 流体が球の表面を突き抜けず, 離れないことから, 球の表面 $r=R$ で

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{dR}{dt} \quad (8)$$

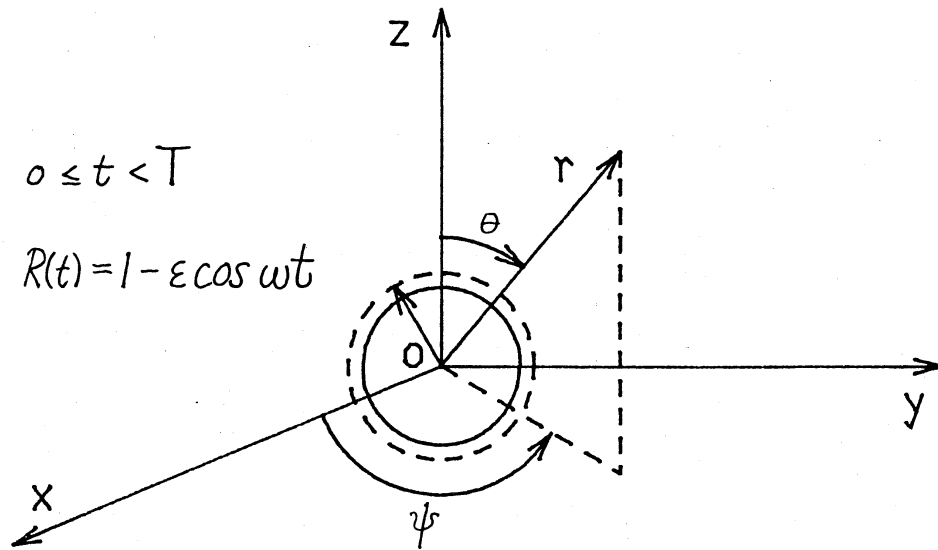


Fig.4 球の脈動

が成り立たなくては行けない。さらに $r \rightarrow \infty$ で課せられる放射条件を考慮する。 $R(t)$ については、 $t=0$ の瞬間にそれまで静止していた球が脈動を始め、一周期後、脈動を停止するモデルを考えて、次のようにする。

$$\left. \begin{array}{ll} 0 \leq t < T & R(t) = 1 - \varepsilon \cos \omega t, \\ t < 0, t \geq T & R(t) = 1 - \varepsilon. \end{array} \right\} \quad (9)$$

ここで、 ω は無次元化された角振動数、 T は周期 ($T = 2\pi/\omega$) であり、 ε は 1 に比べて十分に小さいパラメータである。

初期条件は、最初、流体が静止しており、圧力変動がないことから、 $t=0$ で

$$\phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (10)$$

でなければならぬ。

以下の解析は弱非線形問題を取り扱う。

(5), (6), (8), (10) に正則摂動展開

$$\left. \begin{aligned} \phi(r, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \phi_n(r, t), \\ p(r, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n p_n(r, t). \end{aligned} \right\} (11)$$

を用いる。各式ごとに、 ε^n に関する等式の項をまとめて、零と置くことにより、次の方程式系が得られる。

ε^1 オーダー (線形問題)

$$\left. \begin{aligned} \Delta \phi_1 - \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{p_1}{\gamma} &= -\frac{\partial \phi_1}{\partial t}, \\ 0 \leq t < T \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial r} &= \omega \sin \omega t \quad \text{on } r=1 \\ t \geq T \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial r} &= 0 \quad \text{on } r=1, \\ \phi_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial t} &= 0 \quad \text{at } t=0. \end{aligned} \right\} (12)$$

ε^2 オーダー

$$\left. \begin{aligned} \Delta \phi_2 - \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right)^2 + \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right)^2 \right], \\ \frac{p_2}{\gamma} &= -\frac{\partial \phi_2}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right)^2 \right], \\ \phi_2 = \frac{\partial \phi_2}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \right\} (13)$$

ただし、以下の解析では、 ε^2 オーダーの球面上の境界条件を考慮する必要はない。(ε^3 オーダー以下の問題は省略。)

§3. 方程式系の正則摂動解、及びくり込み

Fig.5 のように、 (r, t) 平面を領域 I, II, III に分けて考える。

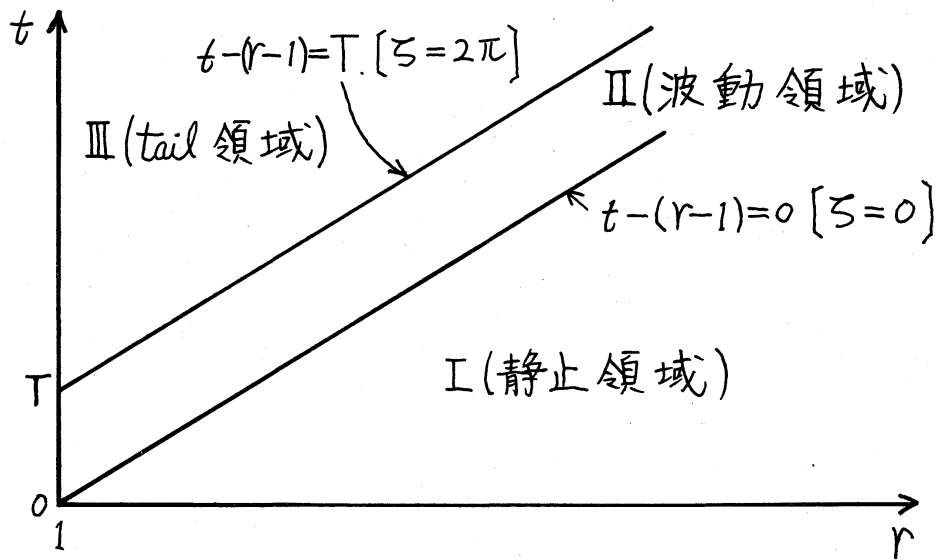


Fig.5 領域

ε^1 オーダーの解.

領域II ($0 \leq \zeta < 2\pi$)

$$\phi_1 = A \frac{\cos(\zeta + \delta)}{r} - A^2 \frac{e^{-\zeta/\omega}}{r} \quad (14)$$

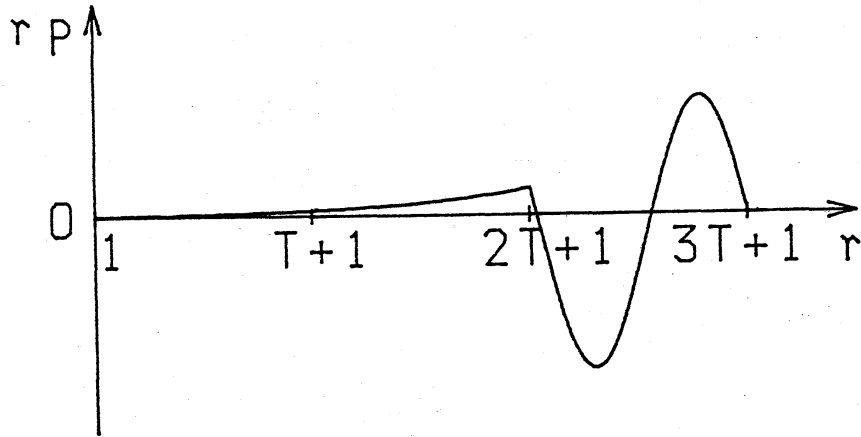
$$\frac{p_1}{r} = \omega A \frac{\sin(\zeta + \delta)}{r} - A^2 \frac{e^{-\zeta/\omega}}{r} \quad (15)$$

領域III ($\zeta \geq 2\pi$)

$$\phi_1 = A^2 (e^T - 1) \frac{e^{-\zeta/\omega}}{r} \quad (16)$$

$$\frac{p_1}{r} = A^2 (e^T - 1) \frac{e^{-\zeta/\omega}}{r} \quad (17)$$

$$\text{ただし} \quad \begin{cases} \zeta = \omega(t - r + 1) \\ A = \omega / \sqrt{1 + \omega^2} \\ \tan \delta = 1/\omega \end{cases}$$

Fig. 6 線形の $rp-r$ 曲線 ($\omega=4$)

ε^2 オーダーの遠方場における解 ($r \rightarrow \infty$)

領域 II ($0 \leq \zeta < 2\pi$)

$$\phi_2 = \frac{\ln r}{r} \left[\frac{\gamma+1}{8} \omega^2 A^2 \{ \cos 2(\zeta + \delta) - 1 \} + \frac{\gamma+1}{2} \omega A^3 e^{-\zeta/\omega} \sin(\zeta + \delta) - \frac{\gamma+1}{4} A^4 e^{-2\zeta/\omega} \right] + o\left(\frac{1}{r}\right) \quad (18)$$

領域 III ($\zeta \geq 2\pi$)

$$\phi_2 = -\frac{\ln r}{r} \left[-\frac{\gamma+1}{4} A^4 (e^\pi - 1)^2 e^{-2\zeta/\omega} \right] + o\left(\frac{1}{r}\right) \quad (19)$$

以上より, 圧力変動 p の形式解を次に書く.

領域 II ($0 \leq \zeta < 2\pi$)

$$\begin{aligned} \frac{p}{\gamma} = & \frac{\varepsilon A}{r} \left[\omega \sin(\zeta + \delta) - A e^{-\zeta/\omega} \right] \\ & + \frac{\gamma+1}{2} A^2 \frac{\ln r}{r} \left[\frac{\omega^3}{2} \sin 2(\zeta + \delta) + \omega A e^{-\zeta/\omega} \{ \sin(\zeta + \delta) - \omega \cos(\zeta + \delta) \} \right. \\ & \left. - A^2 e^{-2\zeta/\omega} \right] + o\left(\frac{\varepsilon^2}{r}, \frac{\varepsilon^3 (\ln r)^2}{r}\right) \end{aligned} \quad (20)$$

領域 III ($\zeta \geq 2\pi$)

$$\begin{aligned} \frac{p}{\gamma} &= \varepsilon A^2 (e^T - 1) \frac{e^{-\xi/\omega}}{r} \\ &\quad - \varepsilon^2 \frac{\gamma+1}{2} A^4 (e^T - 1)^2 \frac{\ln r}{r} e^{-2\xi/\omega} + o\left(\frac{\varepsilon^2}{r}, \frac{\varepsilon^3 (\ln r)^2}{r}\right) \end{aligned} \quad (21)$$

(20)式, 及び (21)式において, それぞれ第一項と第二項の比は, およそ $\varepsilon \ln r$ である. したがって $\ln r > O(1/\varepsilon)$ となる r の領域では, ε による正則擾動展開の妥当性が失われる.

この特異性を除去するために, くり込み (renormalization) の方法を用いる. すなわち, (20)式において独立変数 r を

$$r = \eta + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n f_n(\eta, t) \quad (22)$$

のように変数変換する. 新しい変数 η によって書かれた擾動解が特異性をもたないように, f_n を決定すると, 次のようになる.

領域Ⅱ ($0 \leq \xi < 2\pi$)

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{\gamma} &= \frac{\varepsilon A}{\eta} \left[\omega \sin(\xi + \delta) - A e^{-\xi/\omega} \right] + o\left(\frac{\varepsilon^2}{\eta}\right) \\ r &= \eta + \varepsilon \frac{\gamma+1}{2} A \ln r \left[\omega \sin(\xi + \delta) - A e^{-\xi/\omega} \right] \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

ただし $\xi = \omega(t - \eta + 1)$

同様に (21)式についても, くり込み

$$r = \eta + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n g_n(\eta, t) \quad (24)$$

を行う.

領域Ⅲ ($\xi \geq 2\pi$)

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{\gamma} &= \varepsilon A^2 (e^T - 1) \frac{e^{-\xi/\omega}}{\eta} + o\left(\frac{\varepsilon^2}{\eta}\right) \\ r &= \eta + \varepsilon \frac{\gamma+1}{2} A^2 (e^T - 1) \ln \eta e^{-\xi/\omega} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

(23)式, (25)式の解は, 遠方場で特異性をもたない.

ここでは $O(\varepsilon^2)$ の問題までしか考慮せず, くり込みを実行した. したがって, $O(\varepsilon^3)$ 以上の高次の解において特異性が除去されているという保証はない. しかし, 球の連続的な脈動により放射される音波の問題においては, $O(\varepsilon^2)$ までを考慮したくり込みの結果の妥当性が証明されており^[5], 今の場合も (23)式, (25)式の解が妥当であることがいえるものと思われる.

また, くり込みを行う前の形式解 (20), (21) は領域 II と III の境界 $\varphi = 2\pi$ において不連続であったが (23), (25) の解は, 境界 $\varphi = 2\pi$ で連続になっていることを注意しておこう.

以上より, (23), (25) の解がこの問題の一樣に有効な第一近似解であると考えられる.

§ 4. 衝撃波の発生

放射された音波は弱非線形効果により '突っ立ち' を起こし, 遠方場に衝撃波を生じる. 衝撃波は,

$$\left| \frac{\partial p}{\partial r} \right| = \left| \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r} \right| \rightarrow \infty \quad (26)$$

と初めてなる位置で発生する.

まず, 領域 II を考える.

(23)式より $\partial p / \partial \eta$ は発散しないことがわかる. また $\partial \eta / \partial r = (\partial r / \partial \eta)^{-1}$ であるので, 次の式を初めて満たす r_s で衝撃波が

発生する。

$$\frac{\partial r}{\partial \eta} = 1 - \varepsilon A \frac{\gamma+1}{2} \ln \eta \left\{ \omega^2 \cos(\xi + \delta) + A e^{-\xi/\omega} \right\} + o\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right) \\ = 0 \quad (27)$$

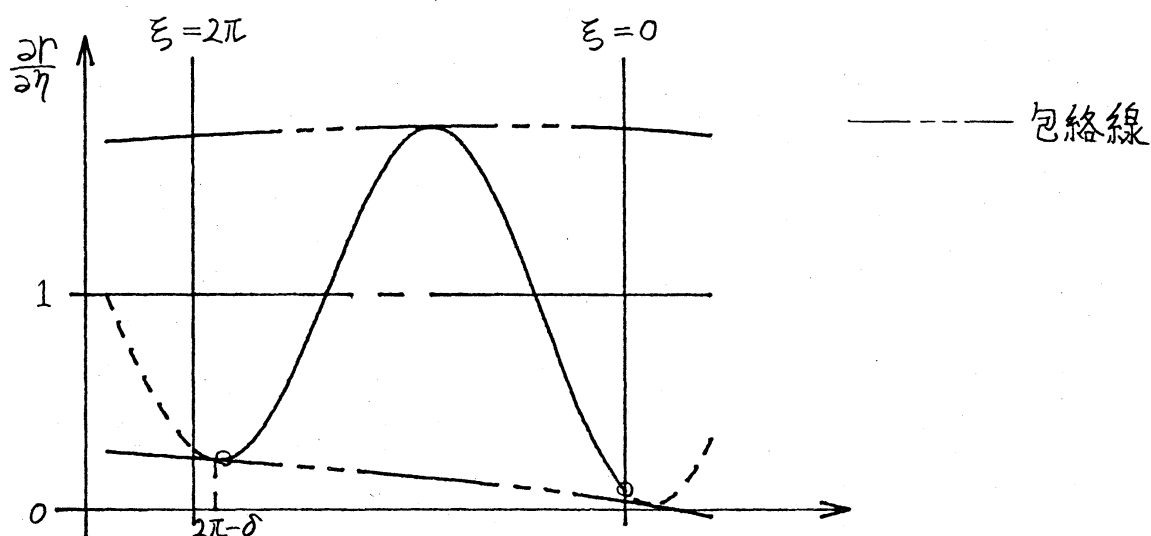


Fig. 7 $\partial r / \partial \eta$

まず、衝撃波の形成される位相 ξ_s を与える関係式は、次のようになる。(添字 f は前方衝撃波を、 b は後方衝撃波を表わす。)

$$\xi_{fs} = 0 \quad (28)$$

$$\omega^3 \sin(\xi_{fs} + \delta) + A e^{-\xi_{fs}/\omega} = 0 \quad (29)$$

(28), (29) を (27) に代入し、そして、衝撃波形成位置 r_s を求めると、

$$r_{fs} = \exp\left(\frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{\varepsilon \omega^2}\right) \quad (30)$$

$$r_{cs} = \exp\left\{\frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{\varepsilon \omega^3 (-\sin \xi_{cs})}\right\} - \frac{1}{\omega \tan \xi_{cs}} - 1 \quad (31)$$

のようになる。ここに ξ_{cs} は (29) の超越方程式の根である。

また、領域Ⅲを考えると、 $\partial p / \partial r$ は発散しないので領域Ⅲでは、衝撃波は発生しない。

したがって、衝撃波は二つ発生する。

ここで、前方衝撃波と後方衝撃波のどちらか音源に近い位置で発生するか比較してみる。解析的に比較するのは困難なので数値計算をして、その定性的な結果を次に書く。パラメータは ε と ω である。

ε を大きくすれば、つまり脈動の振幅を大きくすれば、後方衝撃波の方が前方衝撃波よりも音源の近くで発生する。

ω を大きくすれば、つまり脈動の速度を速くすれば、後方衝撃波の方が前方衝撃波よりも音源の近くで発生する。

さらに、また、球が一周期だけでなく、連続的に脈動する場合に形成される衝撃波の形成位置 r_{cs} と、今の問題の場合に形成される位置とを比べよう。

r_{cs} は、次のように与えられる。

$$r_{cs} = \exp\left(\frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{\varepsilon \omega^2 A}\right), \quad A = \omega / \sqrt{1+\omega^2} \quad (32)$$

明らかに次式が成り立つ。 ($\because A < 1$)

$$r_{cs} > r_{fs} \quad (33)$$

簡単な考察により次式も成り立つ。

$$r_{os} > r_{es}$$

つまり，連続的に脈動する場合の方が音源から遠い位置で衝撃波が発生する。

§ 5. 考察

Landauの示した Fig. 3 と我々の得た Fig. 8 を比較すると，波形の‘尾’の部分の符号が正負逆であることに気付く（速度波形も圧力波形も定性的には同形にならない）。しかし，我々の計算結果 (17) 式（あるいは (25) 式参照）によると，尾の部分は必ず正になる。この事実は，強非線形波に対しては適用できないが，我々の対象としている弱非線形波に対しては正確に成立する。

我々は，脈動球と衝撃波が形成される位置（球面）の間の領域で一様に有効な擾動解の表現を得た。衝撃波が形成された後の衝撃波の成長と衰退に関しては今後の課題として残っている。この領域においては，等面積法則を援用して，衝撃波の振舞が解析できることが十分に期待されるが，より精密には，Burgers 方程式を用いた取り扱いが望ましい。

参考文献

- [1] マイヤ・ベサラプ著（金光不二夫訳）：ランダウの生涯（東京図書，1973）。

- [2] L.D. Landau : J. Phys. U.S.S.R. 9 (1945) 496 .
- [3] J. H. Ginsberg : J. Acoust. Soc. Am. 64 (1978) 1671.
- [4] S.G. Kelly and A.H. Nayfeh : J. Sound Vib. 72 (1) (1980) 25.
- [5] 井上良紀, 石井伸也, 沖上富雄 : 数理解析研講究録 510 (1984) 246.
- [6] L.D. Landau and E.M. Lifshitz : Fluid Mechanics (Pergamon Press Ltd., 1959)

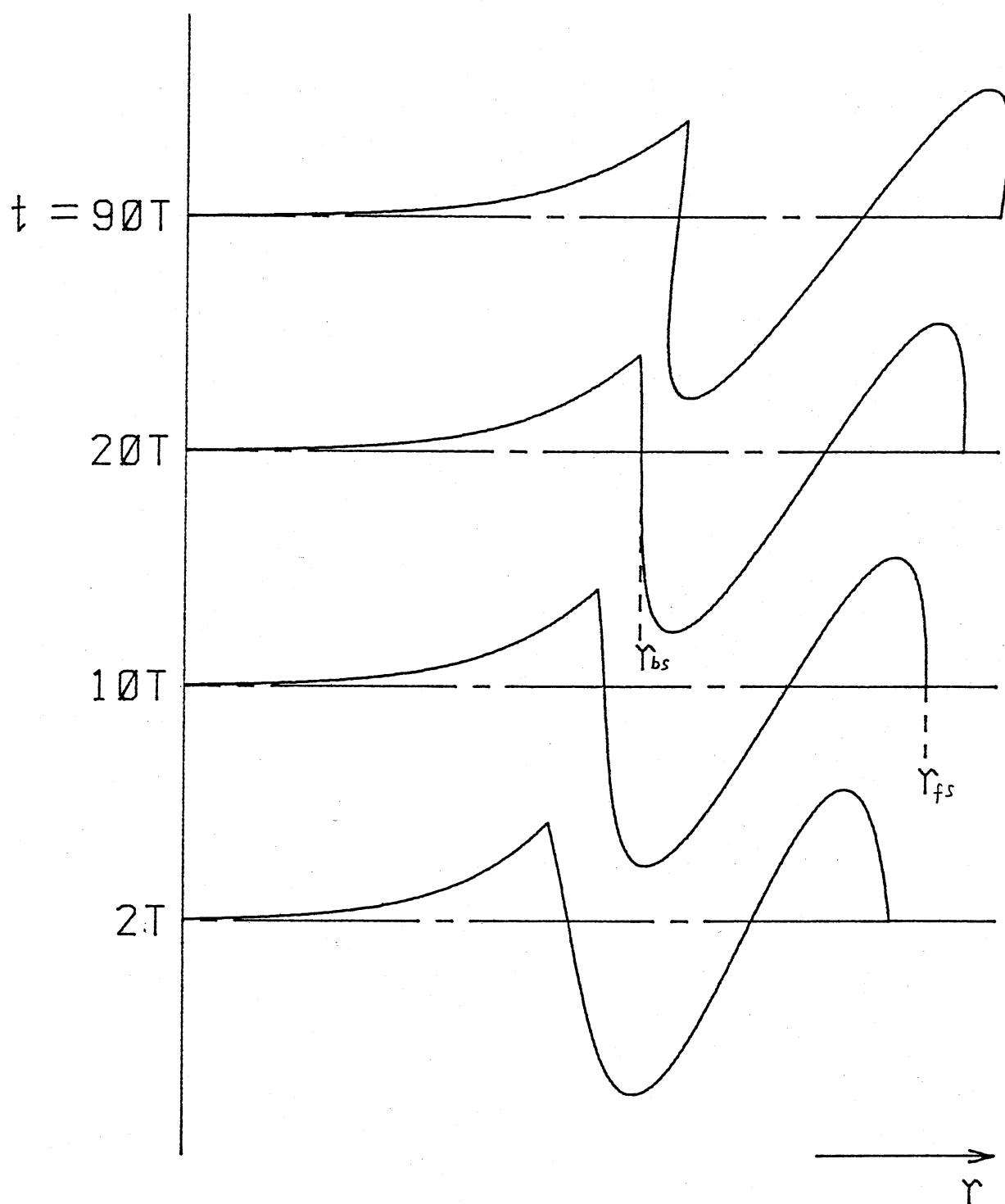


Fig. 8 $r_p - r$ 曲線 ($\omega = 1.5$, $\epsilon = 0.1$)